

Завдання дистанційного туру олімпіади з математики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

1. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{3-x} = 1 - \frac{5}{x-4}$.
2. Вершини D і C прямокутника $ABCD$ лежать на осі Ox , а A і B – на параболі $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$. Довжина діагоналі $BD = \frac{4}{9}\sqrt{13}$. Знайдіть площу прямокутника.
3. Кола з радіусами 3 і 5 з центрами O_1 і O_2 відповідно дотикаються у точці A . Пряма, що проходить через точку A , вдруге перетинає менше коло у точці B , а більше – у точці C . Знайдіть площу трикутника BCO_2 , якщо $\angle ABO_1 = 15^\circ$.
4. При яких значеннях параметра a нерівність $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$ виконується для всіх дійсних значень x ?
5. Знайдіть чотири числа, з яких перших три утворюють геометричну прогресію, а останні три утворюють арифметичну прогресію, причому сума крайніх чисел дорівнює 32, а сума середніх чисел дорівнює 24.
6. Відомо, що $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. Знайдіть: $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$.
7. Розв'яжіть нерівність: $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|-5} \leq 27$.
8. Знайдіть об'єм многогранника, вершинами якого є точки $D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ правильної шестикутної призми $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, сторона основи якої дорівнює $\sqrt[4]{3}$, а бічне ребро дорівнює 2.
9. Знайдіть кількість цілочислових значень x , для яких визначена функція:
$$y = \sqrt{\frac{-x^2 - x + 12}{\lg(x^2 + 1)}}$$
10. Точка P – центр кола, описаного навколо трикутника ABC . Знайдіть її координати, якщо $A(1;3), B(3;1), C(5;5)$.